Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία 23/10/17

- Α. Αρβανιτογεώργος
- Κουντρουφιώτη
- B. O'Neil
- A. Presely

Ο $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) / x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$, $n=1,2,3$ έχει δομή n-διάστατου διανυσματικού χώρου με πράξεις "+", $x+y=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) =$

$= (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

- $\lambda x = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$

Συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$: $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$, $e_n=(0,0,\dots,1)$

$$x=(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

<u>Συνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$</u>

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$

$$(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Πληροί τα ακόλουθα

(1) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

(2) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y\rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$

(3) $\langle x,x \rangle \geq 0$ και $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

Δύο διανύσματα $x,y \in \mathbb{R}^n$ καλούνται ορθογώνια (ή κάθετα) <u>αν-ν</u> $\langle x,y \rangle = 0$

Ανισότητα C-S $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$ $\boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|}$

Μήκος: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\qquad x = (x_1, \dots, x_n)$

Γωνία μη-μηδενικών διανυσμάτων

$x,y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \exists\ \cos\theta = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|},\ \theta \in [0,\pi]$

θ είναι η γωνία των x,y

Παρατήρηση: Τα $x,y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ είναι ορθογώνια $\Leftrightarrow \theta = \pi/2$

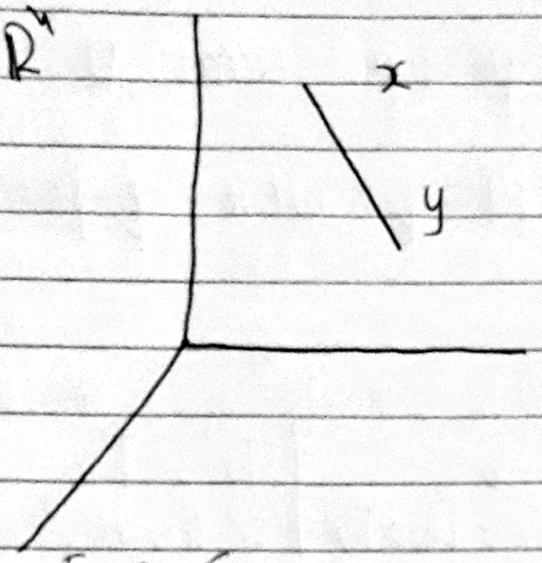
Ιδιότητες μήκους

- $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ $\qquad$ Η ΙΣΟΤΗΤΑ ισχύει όταν x,y ομόρροπα (ΓΕ)
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ευκλείδεια απόσταση στον $\mathbb{R}^n$

Πρόκειται για την συνάρτηση $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$

$(x,y)\in\mathbb{R}^n \longmapsto d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ $\quad x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$



Ιδιότητες

- $d(x,y)\geq 0$ και $d(x,y)=0 \iff x=y$
- $d(y,x)=d(x,y)$
- $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y) \quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}^n$

Ευκλείδειος χώρος στον $\mathbb{R}^n$

Σημαντικό: Μια βάση $\{u_1,\dots,u_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ καλείται ορθομοναδιαία $\iff \langle v_i, v_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad 1\leq i,\ j\leq n$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω $\{u_1,\dots,u_n\}$ ορθομοναδιαία βάση
Για $x\in\mathbb{R}^n$ ισχύει
$$x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,u_i\rangle u_i$$

Μοντέλο για την επιπεδομετρία του $\mathbb{R}^2$
στερεομετρία του $\mathbb{R}^3$

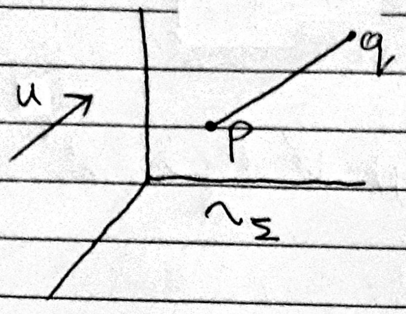
ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ του $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Μια απεικόνιση $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ καλείται ισομετρία $\iff d(p,q)=d(T(p),T(q)) \ \forall\, p,q\in\mathbb{R}^n$

• <u>Παράλληλη Μεταφορά</u>

Δίνεται $v \in \mathbb{R}^n$, καλούμε παράλληλη μεταφορά κατά v την απεικόνιση

$$T_v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad T_v(p) = q \quad \text{ώστε} \quad q - p = v$$



- $T_0 = Id$
- $T_v(p) = p + v$
- $T_v \circ T_w = T_{v+w}$
- $T_v \circ T_{-v} = Id = T_{-v} \circ T_v$

$T_v^{-1} = T_{-v}$ (αντιστρέφεται)

• <u>Ορθογώνιοι Μετασχηματισμοί</u>

<u>Ορισμός</u>

Μια απεικόνιση $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ καλείται ορθογώνιος μετασχηματισμός <u>αν-ν</u>

i) A είναι γρ. απεικόνιση

ii) $\langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$O(n)$ = το σύνολο όλων των ορθογώνιων μ/μων του $\mathbb{R}^n$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$$

$$d(A(p), A(q)) = \|A(p) - A(q)\| = \|A(p-q)\| =$$

$$= \sqrt{\langle A(p-q), A(p-q) \rangle} = \sqrt{\langle p-q, p-q \rangle} = \|p-q\|$$

$$= d(p-q)$$

Συμπέρασμα: Οι ορθ. μ/μοί είναι ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$

Παρατήρηση: Η σύνθεση ισομετριών είναι ισομετρία

Συμβολισμός: $Isom(\mathbb{R}^n)$ = το σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Ταξινόμηση των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$)

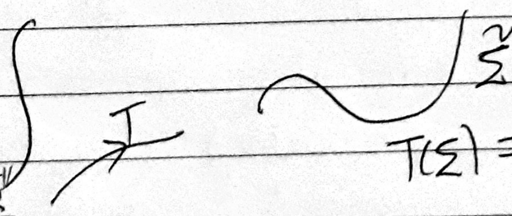
Κάθε ισομετρία T του $\mathbb{R}^n$ γράφεται ως:

$\boxed{T = T_v \circ A}$, T_v: παραλ. μετασχηματισμός κατά $v \in \mathbb{R}^n$
και $A \in O(n)$ ορθ. μετασχ.

γραμμικό μέρος
της ισομετρίας

Γεωμετρική Ισοτιμία

Ορισμός: Το σχήμα $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ καλείται γεωμετρικώς ισότιμο του σχήματος $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^n$ αν-ν $\exists\, T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ ώστε



$T(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$

"Ιδιότητες"

- Κάθε σχήμα Σ είναι γεωμετρικώς ισότιμο με τον εαυτό του, αφού $Id(\Sigma) = \Sigma$, $Id \in Isom(\mathbb{R}^n)$

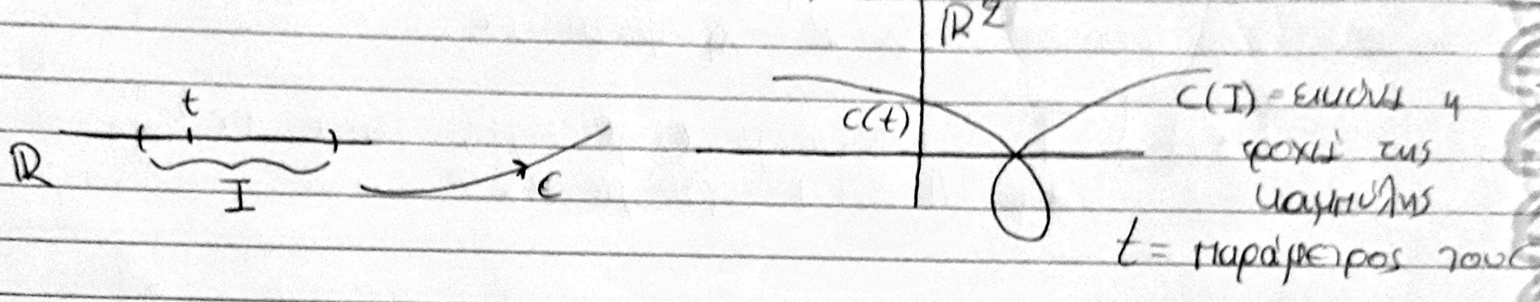
- Σ γεωμ. ισότιμο με το $\tilde{\Sigma} \Rightarrow \exists\, T \in Isom(\mathbb{R}^n)$, $T(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$
$\Rightarrow T^{-1}(\tilde{\Sigma}) = \Sigma$, $T^{-1} \in Isom(\mathbb{R}^n)$

• Αν Σ_1 γεωμ ισότιμο με Σ_2 και Σ_2 γεωμ ισότιμο με Σ_3
$\Rightarrow \Sigma_1$ γεωμ ισότιμο με Σ_3

Μελέτη καμπυλών του $\mathbb{R}^2$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καλούμε καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ κάθε απεικόνιση $c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ διαφορίσιμη (C^2)

C^2: c', c'' υπάρχουν και είναι συνεχείς



$$\lim_{t\to t_0}\frac{c(t)-c(t_0)}{t-t_0} = c'(t_0)$$ = διάνυσμα ταχύτητας
(ή εφαπτόμενο διάνυσμα της c στο t_0)